(解答例)

以下自然数 a, b の最大公約数を (a, b) で表すことにする。

$g_n = (k, n)$ は

$$a_n = n(n+1) + k,\ a_n - a_{n-1} = 2n\ (n > 1)$$

の公約数であり,

$$a_{n-1} = a_n - (a_n - a_{n-1})$$

を割り切る。したがって $G_n = (a_n, a_{n-1})$ は g_n の倍数である。また G_n は

$$2n = a_n - a_{n-1},\ 2k = 2a_n - 2n(n+1)$$

の公約数であるから

$$(2n, 2k) = 2(k, n) = 2g_n$$

の約数である。よって $G_n = g_n$ または $G_n = 2g_n$ となる。

次に

$$k = k'g_n,\ n = n'g_n\ (k', n' \text{は}\ (k', n') = 1 \text{ である自然数}),$$
$$h = n'(n'g_n + 1) + k'$$

とおく。

$$a_n = n'g_n(n'g_n + 1) + k'g_n = hg_n$$
$$a_{n-1} = a_n - 2n = (h - 2n')g_n$$

であるから h が偶数ならば $2g_n$ は a_n, a_{n-1} の公約数であり, 逆も成り立つ。したがって

$$h \text{ が偶数} \iff G_n = 2g_n$$

およびその対偶

$$h \text{ が奇数} \iff G_n = g_n$$

が成立する。

(i) k が奇数のとき

k', g_n は奇数であり, n と n' の偶奇は一致する。したがって任意の $n\,(n > 1)$ に対し, $n'(n'g_n + 1)$ は偶数となり, h は奇数となる。

(ii) k が偶数のとき

(1) $n\,(n > 1)$ が奇数の場合

n', g_n は奇数であり, k' は偶数である。したがって $n'g_n + 1$ は偶数となり, h は偶数となる。

(2) n が偶数の場合

g_n は偶数であるから $h = (n')^2 g_n + k' + n'$ は k', n' の一方が奇数, 他方が偶数ならば奇数となり, k', n' が 奇数ならば偶数となる。

よって

「k が奇数」または「k, n が偶数, かつ $\dfrac{k}{g_n}, \dfrac{n}{g_n}$ の一方が奇数, 他方が偶数」のときは $G_n = g_n$ となり, それ以外の場合, つまり

「k が偶数, n が奇数」または「k, n が偶数, かつ $\dfrac{k}{g_n}, \dfrac{n}{g_n}$ が奇数」

のときは $G_n = 2g_n$ となる。

次にこの結果を用いて G_n を最大にする n の値を求める。k が奇数ならば

$$G_n = g_n \leqq k \ (n > 1)$$

が成り立つ。ここで $g_n = k$ となるのは n が k の倍数のときである。また k の偶奇に関わらず

$$G_n \leqq 2g_n \leqq 2k \ (n > 1)$$

が成り立つ。ここで $G_n = 2k$ となるのは $G_n = 2g_n$かつ $g_n = k$ が成り立つときである。すなわち k が偶数, n が k の倍数であり, かつ $\dfrac{k}{g_n} = \dfrac{k}{k,}, \dfrac{n}{g_n} = \dfrac{n}{k}$ が奇数のときである。

よって求める n の値は

$k = 1$ のとき, $n = 2, 3, 4, \cdots,$

k が 1 以外の奇数のとき, $n = ik \ (i = 1, 2, 3, \cdots),$

k が偶数のとき, $n = (2i-1)k \ (i = 1, 2, 3, \cdots).$