京都大学　数学　理系

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。 (40点)

問 1　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ。ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい。

問 2　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

$\boxed{2}$ (30点)

$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ (35点)

鋭角三角形ABCを考え，その面積を S とする。$0<t<1$ をみたす実数 t に対し，線分ACを $t:1-t$ に内分する点をQ，線分BQを $t:1-t$ に内分する点をPとする。実数 t がこの範囲を動くときに点Pの描く曲線と，線分BCによって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ。

$\boxed{4}$ (30点)

1つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：$1\leqq k\leqq n$ をみたす k のうち，$X_{k-1}\leqq 4$ かつ $X_k\geqq 5$ が成立するような k の値はただ1つである。

$\boxed{5}$ (30点)

半径1の球面上の5点A, B_1, B_2, B_3, B_4 は，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている。この5点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ。

$\boxed{6}$ (35点)

i は虚数単位とする。$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ。

常用対数表(一)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

小数第5位を四捨五入し，小数第4位まで掲載している。

常用対数表(二)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

小数第5位を四捨五入し，小数第4位まで掲載している。

京大数学解答例

＜京進担当＞

$\boxed{1}$

問1　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ であり，$\cos 2\theta$ は有理数だから，$\cos^2\theta$ は有理数である。 ……①

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$=\cos\theta(4\cos^2\theta-3)$$

であり，①により $4\cos^2\theta-3$ が0と異なる有理数であれば，

$$\cos\theta=\frac{\cos 3\theta}{4\cos^2\theta-3}\quad\cdots\cdots②$$

と表され，$\cos 3\theta$ が有理数であることから②の右辺は有理数となり，$\cos\theta$ が有理数でないことに反する。したがって，

$$4\cos^2\theta-3=0$$
$$\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$
$$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\theta=\frac{\pi}{6}\quad\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

が必要である。このとき，$\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，3は素数であるから $\sqrt{3}$ は有理数ではないため，確かに $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は有理数でない。

∴　求める値は　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　…(答)

問2　(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\quad\cdots(\text{答})$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx\quad\cdots\cdots①$$

$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$ であり，$x:0\to\frac{\pi}{4}$ のとき $t:0\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから

$$(①式)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{1-t^2}$$
$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\log|1-t|+\log|1+t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$
$$=\log(\sqrt{2}+1)\quad\cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$ n，$n+1$ は連続する整数なので，どちらかは偶数である。

x が偶数のとき $f(x)=x^3+2x^2+2$ の各項はすべて偶数であるから $f(x)$ も偶数である。

よって，$|f(n)|$，$|f(n+1)|$ のどちらかが偶数である。

素数で偶数となるのは2のみであるから，$|f(n)|=2$ または $|f(n+1)|=2$ を満たす必要がある。

まず $|f(n)|=2$ を満たす整数 n を求める。

$|f(n)|=2$

$\iff |n^3+2n^2+2|=2$

$\iff n^3+2n^2+2=\pm 2$

$\iff n^3+2n^2+4=0$　または　$n^3+2n^2=0$

(i)　$n^3+2n^2+4=0$ のとき

$n^2(n+2)=-4$

n^2 は負でない整数であり，$n+2<0$ かつ $n+2$ は -4 の約数であるから

$n+2=-4,\ -2,\ -1$　すなわち

$n=-6,\ -4,\ -3$ を満たす必要があるが

それぞれ $n^3+2n^2+4=0$ を満たさないので不適。

(ii)　$n^3+2n^2=0$ のとき

$n^2(n+2)=0$　$n=-2,\ 0$

$n=-2$ のとき，$|f(n+1)|=|f(-1)|=3$

$n=0$ のとき，$|f(n+1)|=|f(1)|=5$

よって $n=-2,\ 0$ のとき，$|f(n+1)|$ は素数である。

次に $|f(n+1)|=2$ を満たす整数 n を求める。

(i)，(ii)と同様にして　$n+1=-2,\ 0$

$n=-3,\ -1$

$n=-3$ のとき，$|f(n)|=|f(-3)|=7$

$n=-1$ のとき，$|f(n)|=|f(-1)|=3$

よって $n=-3,\ -1$ のとき，$|f(n)|$ は素数である。

したがって，$|f(n)|$，$|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n は

$n=-3,\ -2,\ -1,\ 0$　…（答）

$\boxed{3}$

座標平面において，点A，B，Cの座標をA$(a,\ b)$，B$(0,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$ としてよい。

△ABCは鋭角三角形であるから　$0<a<c$　…①

△ABCの面積が S であるから　$\frac{1}{2}bc=S$　すなわち　$bc=2S$　…②

点Qは線分ACを $t:1-t$ に内分するから

Q$((1-t)a+tc,\ (1-t)b)$

点Pは線分BQを $t:1-t$ に内分するから P$(x,\ y)$ とすると

$x=t(1-t)a+t^2c>0$，$y=t(1-t)b>0$

$\dfrac{dx}{dt}=a(1-2t)+2tc=2(c-a)t+a>0$　($\because$ ①と $0<t<1$)

よって，$0<t<1$ において x は単調増加である。

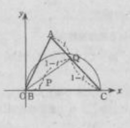
また，$t\to+0$ のとき点Pは点Bに限りなく近づき，$t\to 1-0$ のとき点Pは点Cに限りなく近づく。

よって，点Pの描く曲線と線分BCによって囲まれる部分の面積は

$$\int_0^c y\,dx=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_0^1 t(1-t)b\cdot\{a(1-2t)+2tc\}dt$$
$$=ab\int_0^1 t(1-t)(1-2t)dt+2bc\int_0^1 t^2(1-t)dt$$
$$=ab\int_0^1(2t^3-3t^2+t)dt+4S\int_0^1(t^2-t^3)dt\quad(\because ②)$$
$$=ab\left[\frac{1}{2}t^4-t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+4S\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4\right]_0^1$$
$$=ab\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)+4S\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{3}S$$

【補足】

∠BACが鋭角であることにより，点Aは辺BCを直径とする半円（下図の半円）の上側にある。



$\boxed{4}$

さいころを1回投げたとき，1, 2, 3または4の目が出る事象を L，5または6の目が出る事象を H とすると

L が起こる確率は，$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

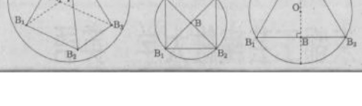
H が起こる確率は，$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

である。

条件を満たすには，$1\leqq k\leqq m\leqq n$ として，k 回目から m 回目まで事象 H が起こり，それ以外は事象 L が起こるので，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-k+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$
$$=\frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\sum_{m=k}^{n}2^{n-m}$$
$$=\frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cdot\frac{2^{n-k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{n}(2^n-2^{k-1})$$
$$=\frac{1}{3^n}\left(n\cdot 2^n-\frac{2^n-1}{2-1}\right)$$
$$=\frac{(n-1)\cdot 2^n+1}{3^n}\quad\cdots(\text{答})$$

$\boxed{5}$



B_1, B_2, B_3, B_4 は同一球面上の4点で正方形をなすから，同一円周上に存在する．

半径1の球の中心をO，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ の対角線 B_1B_3，B_2B_4 の交点をB，四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積を V，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ の面積を S とする．

点Bを通り正方形 $B_1B_2B_3B_4$ に垂直な直線 l を考えると，l 上に点Oがある．

ここで，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を固定した場合に V が最大となるのは，球面と l との2交点のうち，点Bとの距離が小さくない方をAとしたときである．

そのとき，$\mathrm{OB} = x\ (0 \leqq x < 1)$ とおくと

$$\mathrm{B_1B} = \sqrt{\mathrm{OB_1}^2 - \mathrm{OB}^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\ \mathrm{B_1B_3} = 2\mathrm{B_1B} = 2\sqrt{1-x^2}$$

よって

$$S = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 2(1-x^2)$$

また

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AO} + \mathrm{OB} = 1 + x$$

と表せ

$$V = \frac{1}{3}\cdot S \cdot \mathrm{AB} = \frac{2}{3}(1-x^2)(1+x) = \frac{2}{3}(1+x)^2(1-x)$$

ここで

$$f(x) = (1+x)^2(1-x)$$

とおくと

$$f'(x) = 2(1+x)(1-x) - (1+x)^2 = -(x+1)(3x-1)$$

$f'(x) = 0$ とすれば $x = -1,\ \frac{1}{3}$ であるから，増減表は右のようになり，$f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$$

である．

x	0		$\frac{1}{3}$		(1)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

ゆえに，V の最大値は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{27} = \frac{64}{81}$$

である．

$\boxed{6}$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n + (\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n$$

$$= (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + (\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= 2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$$

よって，$2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} > 10^{10}$ を満たす最小の正の整数 n を求めればよい。

$$f(n) = 2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$$

とおくと，$\cos\frac{n\pi}{4} \leqq 1$ より

$$f(n) \leqq 2(\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n+2}{2}}$$

ここで対数表より，$\log_{10}2 < \frac{10}{33} = 0.3030\cdots$ なので

$$\log_{10}2 < \frac{10}{33} \iff 33\log_{10}2 < 10$$

$$\iff \log_{10}2^{33} < 10$$

$$\iff 2^{33} < 10^{10}$$

よって，$2^{\frac{n+2}{2}} \leqq 2^{33}$ となる n すなわち $n \leqq 64$ では $f(n) < 10^{10}$ となる。

$$f(65) = 2(\sqrt{2})^{65}\cos\frac{65\pi}{4} = 2^{33} < 10^{10}$$

$$f(66) = 2(\sqrt{2})^{66}\cos\frac{66\pi}{4} = 0 < 10^{10}$$

$$f(67) = 2(\sqrt{2})^{67}\cos\frac{67\pi}{4} < 0 < 10^{10}$$

$$f(68) = 2(\sqrt{2})^{68}\cos\frac{68\pi}{4} < 0 < 10^{10}$$

$$f(69) = 2(\sqrt{2})^{69}\cos\frac{69\pi}{4} < 0 < 10^{10}$$

$$f(70) = 2(\sqrt{2})^{70}\cos\frac{70\pi}{4} = 0 < 10^{10}$$

$$f(71) = 2(\sqrt{2})^{71}\cos\frac{71\pi}{4} = 2^{36}$$

ここで対数表より，$\log_{10}2 > \frac{10}{36} = 0.277\cdots$ なので

$$\log_{10}2 > \frac{10}{36} \iff 36\log_{10}2 > 10$$

$$\iff \log_{10}2^{36} > 10$$

$$\iff 2^{36} > 10^{10}$$

すなわち $f(71) > 10^{10}$ であるので 求める n の値は $\underline{\underline{71}}$

（２月２６日（火）京都新聞）